Analytic and Algebraic Geometry

edited by
Tadeusz Krasiński
Stanisław Spodzieja

FACULTY OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
UNIVERSITY OF ŁÓDŹ

Łódź 2013

Analytic and Algebraic Geometry

40 LAT
WYDAWNICTWA
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

Analytic and Algebraic Geometry

edited by

Tadeusz Krasiński

Stanisław Spodzieja

FACULTY OF MATHEMATICS
AND COMPUTER SCIENCE
UNIVERSITY OF ŁÓDŹ

Łódź 2013

Tadeusz Krasiński – Department of Algebraic Geometry and Theoretical Computer Science, Faculty of Mathematics and Computer Science, 90-238 Łódź, Banacha Str. 22
krasinski@uni.lodz.pl

Stanisław Spodzieja – Department of Analytical Functions and Differential Equations, Faculty of Mathematics and Computer Science, 90-238 Łódź, Banacha Str. 22
spodziej@math.uni.lodz.pl

COVER DESIGN
Michał M. Jankowski

Publication reviewed

Printed directly from camera-ready materials provided to the Łódź University Press by Department of Analytical Functions and Differential Equations

First Edition. W.06395.13.0.K

ISBN (wersja drukowana) 978-83-7969-017-6
ISBN (ebook) 978-83-7969-243-9

Łódź University Press
90-131 Łódź, ul. Lindleya 8
www.wydawnictwo.uni.lodz.pl
e-mail: ksiegarnia@uni.lodz.pl
tel. (42) 665 58 63, faks (42) 665 58 62

Contents

Preface

Annual Conferences in Analytic and Algebraic Geometry have been organized by Faculty of Mathematics and Computer Science of the University of Łódź since 1980. Until now, proceedings of these conferences (mainly in Polish) have comprised educational materials describing current state of a branch of mathematics, new approaches to known topics, and new proofs of known results (see the Internet page: http://konfrogi.math.uni.lodz.pl/).

The subject of the present volume include new results and survey articles concerning real and complex algebraic geometry, singularities of curves and hypersurfaces, invariants of singularities (the Milnor number, degree of $\mathcal{C}^0$-sufficiency), algebraic theory of derivations and others topics.

One remarkable element of this collection is an English translation of the Polish version, published in proceedings of the above mentioned conferences, of an article by Stanisław Łojasiewicz (1926-2002) devoted to the famous Hironaka theorem on resolution of singularities. It contains his original approach to the problem in the case of curves and coherent analytic sheaves on 2-dimensional manifolds. This interesting article has not yet been available in English. Additionally, we add a photo portrait of him and the facsimile of one page of his original handwritten manuscript.

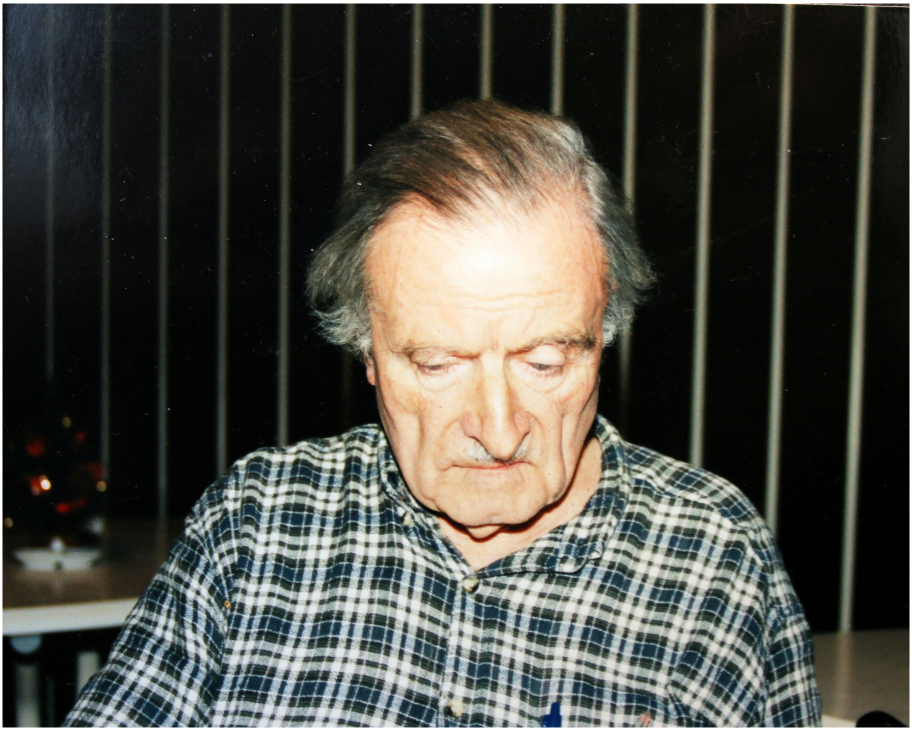
We would like to thank Arkadiusz Płoski for the help in preparing the volume, Michał Jankowski for designing the cover, referees for preparing reports of the articles and all participants of the Conferences for their good humor and enthusiasm in doing mathematics.

Finally, we would like to thank Stanisław Łojasiewicz jr and Anna Ostoja-Łojasiewicz, the heirs of Stanisław Łojasiewicz, for having agreed to include his article into this volume.

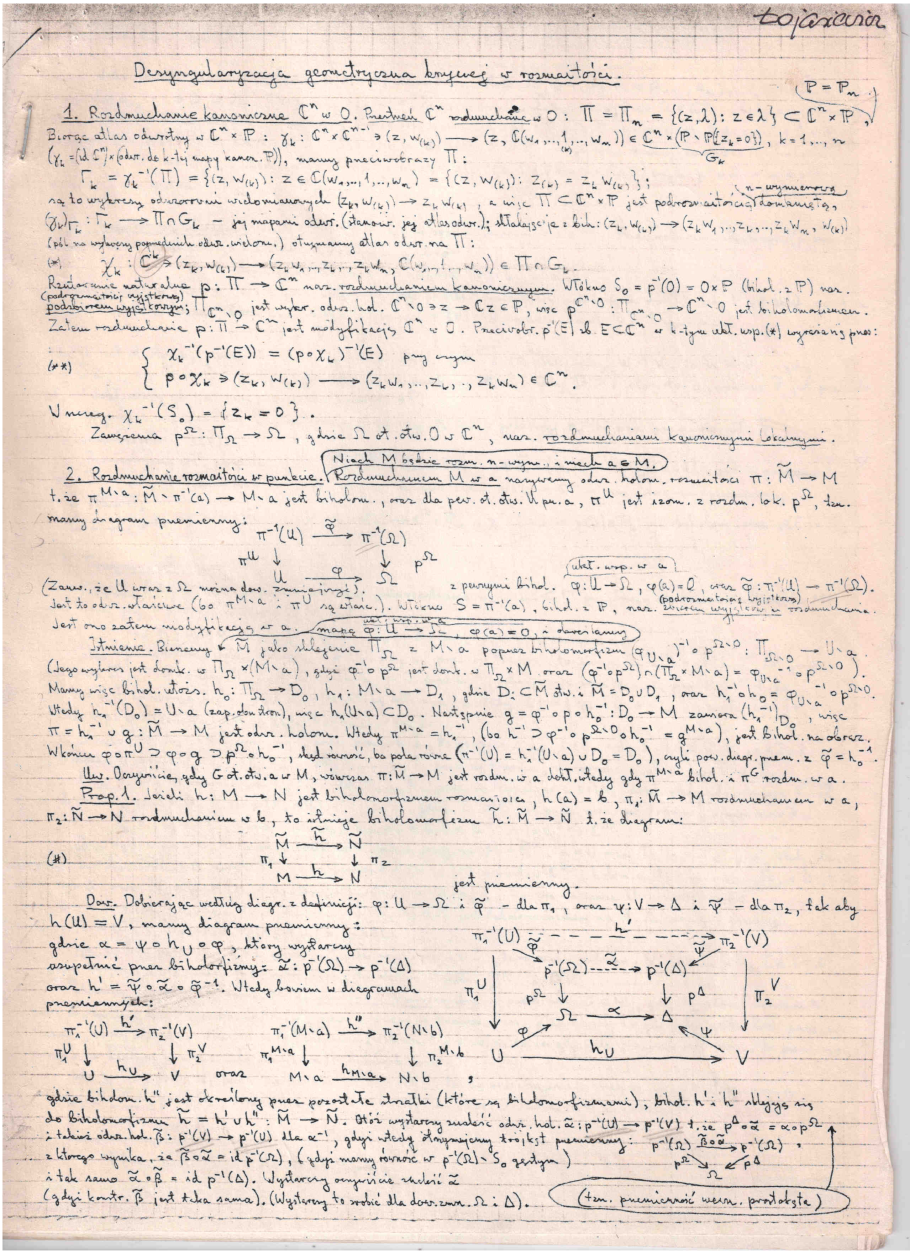
We dedicate the whole volume to the memory of Stanisław Łojasiewicz.

Tadeusz Krasiński
Stanisław Spodzieja

November 2013, Łódź



Stanisław Łojasiewicz (9 X 1926 – 14 XI 2002)
(The photo was taken by Przemysław Skibiński in 2000)



Łojasiewicz

Desyngularyzacja geometryczna krzywej w rozmaitości.

$(\mathbb{P} = \mathbb{P}_n)$

1. Rozdmuchanie kanoniczne $\mathbb{C}^n$ w 0. Przestrzeń $\mathbb{C}^n$ rozdmuchana w 0: $\Pi = \Pi_n = \{(z,\lambda): z \in \lambda\} \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}$,

Biorąc atlas odwrotny w $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}$: $\gamma_k : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n-1} \ni (z, w_{(k)}) \longrightarrow (z, \mathbb{C}(w_1,\dots,\underset{(k)}{1},\dots,w_n)) \in \mathbb{C}^n \times \underbrace{(\mathbb{P} \setminus \mathbb{P}(\{z_k = 0\})}_{G_k}$, $k = 1,\dots,n$

($\gamma_k = (\mathrm{id}\,\mathbb{C}^n) \times$ (odwr. do k-tej mapy kanon. $\mathbb{P}$)), mamy przeciwobrazy Π:

$$\Gamma_k = \gamma_k^{-1}(\Pi) = \{(z, w_{(k)}): z \in \mathbb{C}(w_1,\dots,1,\dots,w_n)\} = \{(z, w_{(k)}): z_{(k)} = z_k w_{(k)}\};$$

są to wykresy odwzorowań wielomianowych $(z_k, w_{(k)}) \to z_k w_{(k)}$, a więc $\Pi \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}$ jest podrozmaitością domkniętą (n-wymiarową), $(\gamma_k)_{\Gamma_k} : \Gamma_k \longrightarrow \Pi \cap G_k$ – jej mapami odwr. (stanowią jej atlas odwr.); składając je z bih.: $(z_k, w_{(k)}) \to (z_k w_1,\dots,z_k,\dots,z_k w_n, w_{(k)})$ (pól na wykresy poprzednich odwr. wielom.) otrzymamy atlas odwr. na Π:

(*) $\quad \chi_k : \mathbb{C}^k \ni (z_k, w_{(k)}) \longrightarrow (z_k w_1,\dots,z_k,\dots,z_k w_n, \mathbb{C}(w_1,\dots,1,\dots,w_n)) \in \Pi \cap G_k$.

Rzutowanie naturalne $p : \Pi \to \mathbb{C}^n$ naz. rozdmuchaniem kanonicznym. Włókno $S_0 = p^{-1}(0) = 0 \times \mathbb{P}$ (bihol. z $\mathbb{P}$) naz. podzbiorem wyjątkowym (podrozmaitością wyjątkową); $\Pi_{\mathbb{C}^n \setminus 0}$ jest wykr. odwz. hol. $\mathbb{C}^n \setminus 0 \ni z \to \mathbb{C}z \in \mathbb{P}$, więc $p^{\mathbb{C}^n \setminus 0} : \Pi_{\mathbb{C}^n \setminus 0} \to \mathbb{C}^n \setminus 0$ jest biholomorfizmem. Zatem rozdmuchanie $p : \Pi \to \mathbb{C}^n$ jest modyfikacją $\mathbb{C}^n$ w 0. Przeciwobr. $p^{-1}(E)$ zb. $E \subset \mathbb{C}^n$ w k-tym ukł. wsp. (*) wyraża się przez:

$$(**) \quad \begin{cases} \chi_k^{-1}(p^{-1}(E)) = (p \circ \chi_k)^{-1}(E) & \text{przy czym} \\ p \circ \chi_k \ni (z_k, w_{(k)}) \longrightarrow (z_k w_1,\dots,z_k,\dots,z_k w_n) \in \mathbb{C}^n. \end{cases}$$

W szczeg. $\chi_k^{-1}(S_0) = \{z_k = 0\}$.

Zawężenia $p^{\Omega} : \Pi_{\Omega} \to \Omega$, gdzie Ω ot. otw. 0 w $\mathbb{C}^n$, naz. rozdmuchaniami kanonicznymi lokalnymi.

Niech M będzie rozm. n-wym., i niech $a \in M$.

2. Rozdmuchanie rozmaitości w punkcie. Rozdmuchaniem M w a nazywamy odwz. holom. rozmaitości $\pi : \tilde{M} \to M$ t. że $\pi^{M \setminus a} : \tilde{M} \setminus \pi^{-1}(a) \to M \setminus a$ jest bihol., oraz dla pew. ot. otw. U pkt. a, π^U jest izom. z rozdm. lok. p^{Ω}, tzn. mamy diagram przemienny:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \pi^{-1}(\Omega) \\ \pi^U \downarrow & & \downarrow p^{\Omega} \\ U & \xrightarrow{\varphi} & \Omega \end{array}$$

z pewnymi bihol. $\varphi : U \to \Omega$, $\varphi(a) = 0$ (ukł. wsp. w a), oraz $\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \pi^{-1}(\Omega)$.

(Zauw., że U wraz z Ω można dow. zmniejszyć). Jest to odwz. właściwe (bo $\pi^{M \setminus a}$ i π^U są właśc.). Włókno $S = \pi^{-1}(a)$, bihol. z $\mathbb{P}$, naz. zbiorem wyjątkowym (podrozmaitością wyjątkową) w rozdmuchaniu. Jest ono zatem modyfikacją w a. (mapą $\varphi : U \to \Omega$, $\varphi(a) = 0$, i dowolnymi)

Istnienie. Bierzemy $\tilde{M}$ jako sklejenie Π_{Ω} z $M \setminus a$ poprzez biholomorfizm $(\varphi_{U \setminus a})^{-1} \circ p^{\Omega \setminus 0} : \Pi_{\Omega \setminus 0} \to U \setminus a$. (Jego wykres jest domk. w $\Pi_{\Omega} \times (M \setminus a)$, gdyż $\varphi^{-1} \circ p^{\Omega}$ jest domk. w $\Pi_{\Omega} \times M$ oraz $(\varphi^{-1} \circ p^{\Omega}) \cap (\Pi_{\Omega} \times M \setminus a) = \varphi_{U \setminus a}^{-1} \circ p^{\Omega \setminus 0}$). Mamy więc bihol. utożs. $h_0 : \Pi_{\Omega} \to D_0$, $h_1 : M \setminus a \to D_1$, gdzie $D_i \subset \tilde{M}$ otw. i $\tilde{M} = D_0 \cup D_1$, oraz $h_1^{-1} \circ h_0 = \varphi_{U \setminus a}^{-1} \circ p^{\Omega \setminus 0}$. Wtedy $h_1^{-1}(D_0) = U \setminus a$ (zap. obu stron), więc $h_1(U \setminus a) \subset D_0$. Następnie $g = \varphi^{-1} \circ p \circ h_0^{-1} : D_0 \to M$ zawiera $(h_1^{-1})_{D_0}$, więc $\pi = h_1^{-1} \cup g : \tilde{M} \to M$ jest odwz. holom. Wtedy $\pi^{M \setminus a} = h_1^{-1}$, (bo $h^{-1} \supset \varphi^{-1} \circ p^{\Omega \setminus 0} \circ h_0^{-1} = g^{M \setminus a}$), jest bihol. na obraz. W końcu $\varphi \circ \pi^U \supset \varphi \circ g \supset p^{\Omega} \circ h_0^{-1}$, skąd równość, bo pola równe $(\pi^{-1}(U) = h_1^{-1}(U \setminus a) \cup D_0 = D_0)$, czyli pow. diagr. przem. z $\tilde{\varphi} = h_0^{-1}$.

Uw. Oczywiście, gdy G ot. otw. a w M, wówczas $\pi : \tilde{M} \to M$ jest rozdm. w a dokł. wtedy gdy $\pi^{M \setminus a}$ bihol. i π^G rozdm. w a.

Prop. 1. Jeżeli $h : M \to N$ jest biholomorfizmem rozmaitości, $h(a) = b$, $\pi_1 : \tilde{M} \to M$ rozdmuchaniem w a, $\pi_2 : \tilde{N} \to N$ rozdmuchaniem w b, to istnieje biholomorfizm $\tilde{h} : \tilde{M} \to \tilde{N}$ t. że diagram:

$$(\#) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{\tilde{h}} & \tilde{N} \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ M & \xrightarrow{h} & N \end{array}$$

jest przemienny.

Dow. Dobierając według diagr. z definicji: $\varphi : U \to \Omega$ i $\tilde{\varphi}$ – dla π_1, oraz $\psi : V \to \Delta$ i $\tilde{\psi}$ – dla π_2, tak aby $h(U) = V$, mamy diagram przemienny:

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1^{-1}(U) & & \xrightarrow{h'} & & \pi_2^{-1}(V) \\ & \searrow^{\tilde{\varphi}} & & \swarrow^{\tilde{\psi}} & \\ \pi_1^U \downarrow & p^{-1}(\Omega) & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & p^{-1}(\Delta) & \downarrow \pi_2^V \\ & p^{\Omega} \downarrow & & \downarrow p^{\Delta} & \\ & \Omega & \xrightarrow{\alpha} & \Delta & \\ & \nearrow^{\varphi} & & \nwarrow^{\psi} & \\ U & & \xrightarrow{h_U} & & V \end{array}$$

gdzie $\alpha = \psi \circ h_U \circ \varphi$, który wystarczy uzupełnić przez biholomorfizmy: $\tilde{\alpha} : p^{-1}(\Omega) \to p^{-1}(\Delta)$ oraz $h' = \tilde{\psi} \circ \tilde{\alpha} \circ \tilde{\varphi}^{-1}$. Wtedy bowiem w diagramach przemiennych:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{-1}(U) & \xrightarrow{h'} & \pi_2^{-1}(V) \\ \pi_1^U \downarrow & & \downarrow \pi_2^V \\ U & \xrightarrow{h_U} & V \end{array} \quad \text{oraz} \quad \begin{array}{ccc} \pi_1^{-1}(M \setminus a) & \xrightarrow{h''} & \pi_2^{-1}(N \setminus b) \\ \pi_1^{M \setminus a} \downarrow & & \downarrow \pi_2^{M \setminus b} \\ M \setminus a & \xrightarrow{h_{M \setminus a}} & N \setminus b \end{array},$$

gdzie bihdom. h'' jest określony przez pozostałe strzałki (które są biholomorfizmami), bihol. h' i h'' sklejają się do biholomorfizmu $\tilde{h} = h' \cup h'' : \tilde{M} \to \tilde{N}$. Otóż wystarczy znaleźć odwz. hol. $\tilde{\alpha} : p^{-1}(U) \to p^{-1}(V)$ t. że $p^{\Delta} \circ \tilde{\alpha} = \alpha \circ p^{\Omega}$ (tzn. przemienność wewn. prostokąta) i takież odwz. hol. $\tilde{\beta} : p^{-1}(V) \to p^{-1}(U)$ dla α^{-1}, gdyż wtedy otrzymujemy trójkąt przemienny:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(\Omega) & \xrightarrow{\tilde{\beta} \circ \tilde{\alpha}} & p^{-1}(\Omega) \\ & p^{\Omega} \searrow \quad \swarrow p^{\Delta} & \\ & \Omega & \end{array},$$

z którego wynika, że $\tilde{\beta} \circ \tilde{\alpha} = \mathrm{id}\, p^{-1}(\Omega)$, (gdyż mamy równość w $p^{-1}(\Omega) \setminus S_0$ gęstym) i tak samo $\tilde{\alpha} \circ \tilde{\beta} = \mathrm{id}\, p^{-1}(\Delta)$. Wystarczy oczywiście znaleźć $\tilde{\alpha}$ (gdyż konstr. $\tilde{\beta}$ jest taka sama). (Wystarczy to zrobić dla dow. zmn. Ω i Δ).

The facsimile of the first page of the Polish handwritten version of the article (1988) by Stanisław Łojasiewicz, translated in this volume.