ISBN 978-83-936602-6-1

Tadeusz Socha

Matura z matematyki

na poziomie rozszerzonym

tom III

teoretyczne i praktyczne porady matematyczne

matura 2010-2014 i 2015+

Tadeusz Socha

Matura z matematyki na poziomie rozszerzonym

tom III
teoretyczne i praktyczne porady matematyczne

ISBN 978-83-936602-6-1

www.maturzysta.info

e-mail: tadesor@gmail.com

Opracowanie edytorskie i projekt okładki: Socha Tadeusz

Przedstawione w tej publikacji teoretyczne i praktyczne porady z różnych dziedzin matematyki przeznaczone są w zasadzie dla osób przygotowujących się do matury z matematyki na poziomie rozszerzonym.

Większość treści przekracza wymagania poziomu podstawowego, ale porady praktyczne, jak *„Co pisać w rozwiązaniu zadania?”, „Jak nie zostać niewolnikiem kalkulatora?”, „ Obliczenia pamięciowe i pisemne.” , „Co jest najważniejsze w temacie zadania?”, „ Jak zabierać się za rozwiązywanie zadania?”, „Jak rozwiązywać zadania z geometrii? Dokładne omówienie na przykładzie.”*
są przydatne również na poziomie podstawowym.

Spis treści

1. Co pisać w rozwiązaniu zadania?

Rozwiązanie zadania to przedstawiony w pisemnej (pisemno-graficznej) formie, **przebieg rozumowania prowadzący do odpowiedzi na pytanie** postawione w temacie zadania, względnie **wypełnienie polecenia zawartego w temacie zadania**.

Nie jest to opis czynności, które się wykonuje.
Fakt wykonywania poszczególnych czynności i bez opisu widać na papierze.
Często w rozwiązaniach zadań maturalnych spotykałem zapisy typu:

- liczę deltę
- rozwiązuję równanie

Takie zapisy są zbędne. Nie zwiększają w najmniejszym stopniu jakości rozwiązania.
Powinny natomiast znaleźć się zapisy (o ile nie jest to oczywiste): **dlaczego dane równanie należy rozwiązać, co za pomocą tego równania obliczymy**, itp.

Często spotykanym błędem jest nagła zmiana ciągłości rozumowania – bez żadnego komentarza.
Przykładowo: analizowana jest zależność pomiędzy dwoma wielkościami a oraz x. Kończy się to obliczeniem zależności, np. $\mathbf{x = 3a}$, po czy nagle pojawia się zapis: $\mathbf{b > 4a^2 + x}$.
W tym momencie należy ten nowy zapis „**opisać**” (o ile nie jest to przepisany jeden z poprzednich zapisów). Trzeba zapisać: **jaki to ma związek z poprzednimi zapisami, dlaczego ta nierówność musi być spełniona, z czego wynika itp.**

W dalszej części przedstawię autentyczne rozwiązanie zadania „popełnione” przez dobrego ucznia klasy maturalnej. Miał on rozwiązać „wzorcowo”, czyli tak jak napisałby na maturze, zadanie z egzaminu wstępnego na AGH w Krakowie (stare dzieje..).
Czerwonym kolorem będą zaznaczone moje uwagi odnoszące się do poszczególnych fragmentów rozwiązania (zadanie zostało rozwiązane dobrze; mówimy tylko o poprawności **opisu rozumowania**).
Następnie przedstawię moje rozwiązanie tego samego zadania, zawierające bardziej precyzyjny opis przebiegu rozumowania.
Wnioski wyciąg sam, drogi czytelniku.

Zadanie.
Ze zbioru **T** liczb całkowitych spełniających równanie $\mathbf{2|x+3| - |x-1| = 5 + 3x}$ losujemy bez zwracania liczby p,q,r i tworzymy funkcję $\mathbf{f:\ R \to R}$ o wartości $\mathbf{f(x) = px^2 + qx + r}$.

a) Podaj liczbę tak otrzymanych funkcji.
b) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:
   A – otrzymana funkcja jest parzysta
   B - otrzymana funkcja jest różnowartościowa
   C - otrzymana funkcja jest stała

Rozwiązanie ucznia.

$$\mathbf{2|x+3| - |x-1| = 5 + 3x}$$

$$\mathbf{|x+3| = \begin{cases} x+3 & dla\ x \geq -3 \\ -x-3 & dla\ x < -3 \end{cases}},\quad \mathbf{|x-1| = \begin{cases} x-1 & dla\ x \geq 1 \\ -x+1 & dla\ x < 1 \end{cases}}$$

Dla $x < -3$
$2(-x-3)-(-x+1)=5+3x$
$-2x-6+x-1=5+3x$
$-4x=12$
$x=-3$ brak wniosku: co jest rozwiązaniem tego fragmentu

Dla $x \in \langle -3,1)$
$2(x+3)-(-x+1)=5+3x$
$2x+6+x-1=5+3x$
$0=0$ brak wniosku: co jest rozwiązaniem tego fragmentu

Dla $x \geq 1$
$2(x+3)-(x-1)=5+3x$
$2x+6-x+1=5+3x$
$-2x=-2$
$x=1$ brak wniosku: co jest rozwiązaniem tego fragmentu

Wyznaczam zbiór T: $T=\{-3,-2,-1,0,1\}$ zbiór T składa się z liczb całkowitych, będących rozwiązaniami równania. Należało podać rozwiązanie równania, a potem na tej podstawie zbiór T. Przy takim zapisie podany zbiór <u>nie wynika z poprzednich zapisów</u> (czytający musi sam przeprowadzić odpowiednie rozumowanie).

a) $\overline{\overline{\Omega}}=V_5^3=\frac{5!}{(5-3)!}=5\cdot 4\cdot 3=60$

Wszystkich funkcji jest 60.

b) zdarzenie A: funkcja musi mieć równanie $y=px^2+r$ Dlaczego?

$\overline{\overline{A}}=4\cdot 3=12$, $P(A)=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$

zdarzenie B: funkcja musi mieć równanie $y=qx+r$ Dlaczego?

$\overline{\overline{B}}=4\cdot 3=12$, $P(B)=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$

zdarzenie C: funkcja musi mieć równanie $y=r$ Dlaczego?

$\overline{\overline{C}}=0$, $P(C)=0$

Moje rozwiązanie.

$2|x+3|-|x-1|=5+3x$

$|x+3|=\begin{cases} x+3 & \text{dla } x \geq -3 \\ -x-3 & \text{dla } x < -3 \end{cases}$, $|x-1|=\begin{cases} x-1 & \text{dla } x \geq 1 \\ -x+1 & \text{dla } x < 1 \end{cases}$

1) Dla $x < -3$ równanie przyjmuje postać:
$2(-x-3)-(-x+1)=5+3x$
$-2x-6+x-1=5+3x$
$-4x=12$
$x=-3$

Punkt 1) nie ma rozwiązań, bo $x=-3$ nie spełnia warunku $x < -3$

2) Dla $x \in \langle -3,1)$ równanie przyjmuje postać:
$2(x+3)-(-x+1)=5+3x$

$2x + 6 + x - 1 = 5 + 3x$
$0 = 0$
$x \in R$
Rozwiązanie punktu 2): $x \in \langle -3,1)$

3) Dla $x \geq 1$ równanie przyjmuje postać:
$2(x+3) - (x-1) = 5 + 3x$
$2x + 6 - x + 1 = 5 + 3x$
$-2x = -2$
$x = 1$
Rozwiązanie punktu 3): $x = 1$

Ostatecznie rozwiązaniem równania jest zbiór $x \in \langle -3,1 \rangle$.
Wobec tego $T = \{-3,-2,-1,0,1\}$.

a) Ze zbioru T losujemy trzywyrazowy, różnowartościowy ciąg liczb (p,q,r),
czyli $\overline{\overline{\Omega}} = V_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ - jest to ilość wszystkich funkcji

b) A – otrzymana funkcja jest parzysta

Funkcja kwadratowa jest parzysta, jeżeli wierzchołek paraboli leży na osi OY, czyli równanie funkcji jest następujące: $y = px^2 + r$, $(q = 0)$.
Takich funkcji jest $V_2^4 = 4 \cdot 3 = 12$.
Funkcja liniowa jest parzysta, gdy jest stała: $y = r$, $(p = q = 0)$. Ten przypadek nie zachodzi, bo wtedy wylosowany ciąg nie byłby różnowartościowy.
Stąd: $P(A) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$.

B - otrzymana funkcja jest różnowartościowa

Różnowartościowa może tu być tylko funkcja liniowa: $y = qx + r$, $(p = 0)$.
Takich funkcji jest $\overline{\overline{B}} = V_2^4 = 4 \cdot 3 = 12$.
$$P(B) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

C - otrzymana funkcja jest stała

Ten przypadek nie zachodzi (był już omawiany): $\overline{\overline{C}} = 0$, $P(C) = 0$

2. Jak podczas rozwiązywania zadania tworzyć plan poczynań?

Znaczny procent zadań, z jakimi spotyka się młody człowiek zdający maturę z matematyki, to zadania mające ciekawą charakterystykę: można w nich (nie wchodząc w szczegółowe obliczenia) zaplanować krok po kroku czynności, jakie będzie się wykonywać. Najczęściej będą to zadania z parametrem, z geometrii analitycznej, płaskiej i przestrzennej. Takie zadania zdarzają się w każdym innym dziale matematyki, choć już rzadziej.

Przykład.

Dla jakich wartości parametru m, każdy z dwóch różnych pierwiastków równania $\mathbf{x\ \ + mx + 4 = 0}$ jest mniejszy od 4?

Plan:

– $\mathbf{\Delta > 0}$ - mają być dwa różne pierwiastki $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$
– oba pierwiastki większe od 4: $\mathbf{x_1 < 4}$ **i** $\mathbf{x_2 < 4}$, co daje $\mathbf{x_1 - 4 < 0}$ **i** $\mathbf{x_2 - 4 < 0}$.
  Dwie liczby są ujemne, jeżeli ich suma jest ujemna, a iloczyn dodatni.

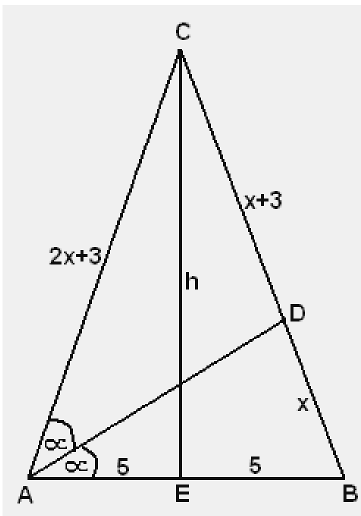
Należy wobec powyższych zapisów rozwiązać układ:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - 4)(x_2 - 4) > 0 \\ (x_1 - 4) + (x_2 - 4) < 0 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu tego układu (w trakcie obliczeń wykorzystujemy wzory Viete'y), otrzymamy rozwiązanie: $\mathbf{m \in (-5, -4) \cup (4, \infty)}$

1. W trójkącie równoramiennym o podstawie 10, dwusieczna kąta przy podstawie dzieli ramię na dwa odcinki, z których jeden, którego końcem jest wierzchołek trójkąta, jest o 3 większy od drugiego.
   Wyznacz długości promieni okręgów opisanych na powstałych trójkątach.

Plan:



– Za pomocą twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego trójkąta obliczymy x:
  $$\frac{\mathbf{x+3}}{\mathbf{2x+3}} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{10}}$$

– Promienie okręgów opisanych na ΔABD i ΔADC obliczymy za pomocą twierdzenia sinusów:

  a) opisany na ΔABD z równania $\frac{x+3}{\sin\alpha} = 2R_1$

  b) opisany na ΔADC z równania $\frac{x}{\sin\alpha} = 2R_2$

– Potrzebujemy $\sin\alpha$.

  W trójkącie AEC $\sin 2\alpha = \frac{h}{2x+3}$, a h można wyliczyć za pomocą twierdzenia Pitagorasa, bo mamy już wyliczone x.

  Teraz $\sin\alpha$ obliczymy z układu równań:

$$\begin{cases} 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{h}{2x+3} \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$$

W wyniku obliczeń uzyskamy wyniki:

$x = 6$, $h = 10\sqrt{2}$,

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{1+\frac{2\sqrt{2}}{3}} - \sqrt{1-\frac{2\sqrt{2}}{3}}}{2} \quad \text{lub} \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{1+\frac{2\sqrt{2}}{3}} + \sqrt{1-\frac{2\sqrt{2}}{3}}}{2}$$

$\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, czyli $\sin\alpha \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, dlatego $\sin\alpha = \frac{\sqrt{1+\frac{2\sqrt{2}}{3}} + \sqrt{1-\frac{2\sqrt{2}}{3}}}{2} \approx 0{,}816$ odrzucamy $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707\right)$. Otrzymaną wartość $\sin\alpha$ należy teraz użyć do obliczenia długości promieni.